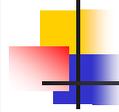




Las matemáticas y los computadores

Ciclo: Año Mundial de las Matemáticas

Alberto Prieto
Catedrático de Arquitectura y
Tecnología de Computadores
10/11/2000



- ***“Luego las matemáticas se pueden definir como aquella materia en la que nunca sabemos de lo que hablamos, ni si lo que decimos es cierto”***
(Sir Bertrand Russell, “Recent Words on the Principles of Mathematics”, 1901)

“... sobre todo si los que hablamos y decimos no somos matemáticos ...”

10/11/2000 Matemáticas y computadores 2
A.Prieto



Contenido

- Desde la antigüedad el hombre ha tratado de reducir al máximo su trabajo físico o intelectual.
- El desarrollo de la aritmética (y de las matemáticas en general) ha ido acompañado de la invención de herramientas o máquinas para automatizar los procesos de cálculo.
- La herramienta actual más **efectiva** para ayuda al cálculo es el computador.
- No obstante, hay que conocer la forma en cómo opera un computador, ya que si no los resultados obtenidos pueden resultar falsos. Esto es debido fundamentalmente a su precisión limitada y a errores cometidos en el diseño de la unidad aritmético-lógica.

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 3



Contenido

- **Antecedentes de los computadores**
 - Desarrollo de las formas de representar los números y de los métodos de cálculo
 - Las herramientas mecánicas y electromecánicas.
- **Los computadores**
 - Las cuatro generaciones
- **Problemas aritméticos de los computadores**
 - Defectos debidos a la precisión limitada
 - Errores de diseño: casos de supercomputadores (CDC y Cray) y del microprocesador Pentium

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 4

Desarrollo de las formas de representar los números

- **Representar cantidades era una tarea muy difícil.**
Pueblos primitivos:
 - Tasmania: {uno, dos, muchos}
 - Sudáfrica {uno, dos} 5-> "dos, dos y uno"
- **Lo más difícil: abstracción del concepto de cantidad**
 - Lenguaje Thimshian (indios): 7 conjuntos para representar los n°:

■ Objetos planos y animales	■ Canoas
■ Objetos redondos y tiempo	■ Medidas
■ Personas	■ Numeración de objetos no particulares
■ Objetos largos y árboles	

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

5

Desarrollo de las formas de representar los números

- Más fácil que abstraer el concepto de n° es contar: asociando las cantidades a piedras, granos de maíz, nudos, etc. Sistemas de numeración aditivos y posicionales.
- S. N. Aditivos: Egipcios (3000 AC)

						
1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

	= 1.231.148
---	-------------

10/11/2000

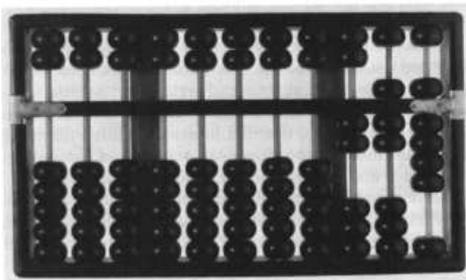
A.Prieto

6

Desarrollo de las formas de representar los números

- En el valle entre el Eufrates y Tigris: ábaco (3000 AC) :
 - Ranuras en una tabla de arena, y piedras ("cálculus")
 - Hilos en los que se insertaban piedras o huesos.

Ábaco chino moderno:

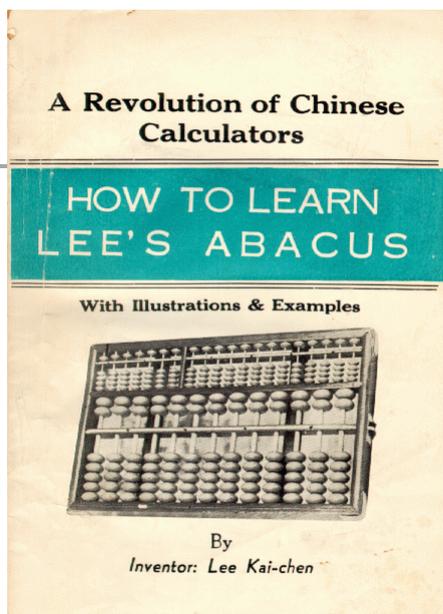


10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

7

- Libro de 1955



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

8

Desarrollo de las formas de representar los números

■ BABILONIOS Y EGIPCIOS

- desarrollaron gran cantidad de métodos de cálculo, utilizando experiencias prueba-error (2600 a de C. No consideraban el 0).
- Obtuvieron tablas de multiplicar, cuadrados, raíces cuadradas, cubos, raíces cúbicas, exponenciales, etc.

■ ROMANOS:

- Sistema de numeración aditivo: {M,D,C,L,X,V,I}
- CCLXXVII por XXI

■ 1 vez CCLXXVII	CCLXXVII
■ X veces CCLXXVII	MMDCCLXX
■ X veces CCLXXVII	<u>MMDCCLXX</u>
	CCLXXVIIIMMDCCLXXMMDCCLXX=
	(simplificando) = MMMMMDCCLXXVII (5.817)

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

9

Desarrollo de las formas de representar los números

■ Sistemas de numeración posicionales:

- Imprescindible el símbolo de 0
- Es necesario aprender tablas
- Bases usuales: 5, 10,20 (esquimales y franceses), y 60

■ HINDUES (I-II)

- Representación posicional de las cifras. Escala decimal. Cero

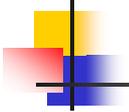
■ ARABES (VII) (dinastías de los califas de Bagdad)

- Álgebra
- Concepto de algoritmo (mejora en los métodos computacionales)
- Matemático persa al-Khowarizmi (825): contactó con hindúes y escribió diversos libros de texto e introdujo el concepto de algoritmo, como proceso para realizar cálculos.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10



Desarrollo de las formas de representar los números

- **Difusión del sistema de numeración y procedimientos de cálculo a través de Europa:**
 - Manuscritos españoles de 976 (Albelda Cloister) y 992
 - En 1085 Alfonso VI de León reconquista Toledo y se traducen y difunden los escritos árabes
 - Leonardo de Pisa (Fibonacci) (1175-1250?) "Liber Abaci"
 - Alexander de Villa (1220?) "Carmen del Algorismo"
 - (muy difícil de entender, estaba en versos hexamétricos)
 - Sacrobosco (1250) "Algorismus Vulgaris"

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 11



Incipit Algorismus Editus per Reverendum virum Joannem de Lario. Salvo ordinis predictorum ays anni & sacre Theologie Doctorum Excellentissimi etc.



Alia que a primis re: origine procedit rone numeror: formata sunt: quodamodi sunt sic cognoscit bit. Etnde in vniuersa re: cognitione numerandi est operatus. Et hinc igit facili numerandi copiositas pto noie Algori Edidit vnde & Algorismus nuncupatus est ars numerandi vel ars introductionis in numeru interpretat. Et Numerus qd dicitur notat formaliter. & mlti. qd licet numerus est vnitate collecta formaliter Numerus est multitudine vnitate profusa. Tunc qd est qu vnique res vna dicit. Et Numeror: aut alius est dignitatis articulo. Et numerus copiosus hinc mltis dicitur ois numerus minor denario. Articulus est numerus ois dicitur vni in. pto dicitur qd nihil sit relictus. Copiosus vo hinc mltis est q dicitur ex digito & articulo. Et sciendu qd ois numerus licet articulus vnus primus est copiosus. Et aut artus noui sunt sicut numeratio a dicitur liber de numeratione copiosus mltis dicitur copiosus radice extrinseca: dicitur dicitur qd in numero dicitur in dicitur vnus quo primo de numeratione postea de alio per ordinem dicitur.

De enumeratione.

Si aut numeratio cuiuslibet numeri p figuras copiosas arti stialis reperit. Figura vnociferat: locum hinc ad sup ponantur duobus ronebus eis nota imponunt. Figura vo dicitur qm ad linee paratione. Et vo qui p illa dicitur quilibet figura procedo dicitur a subsequenti. Et ois vo rone spm in quo formatur. Tunc vo qd est via ordinata ad quilibet numerus reperitione. Sciendu igit qd iuxta noui hinc figure significatio noui digito reperitione. Et sunt tales. o. p. q. r. s. t. u. v. x. y. z. Et dicitur vo de re: vel circulo vel cifra vel figura nihil qd nihil significat si lo cu teno dat alio significatio sine cifra vel cifra puro no pot fieri articulus. Et igit p hoc noui figuras significatio aduenit qd qd cifra qd cifra ptingat quilibet numerus reperit no fuit necesse plus res vnacire figuras significatio. Notandu igit qd quilibet digitus vnus sola figura sibi appropriata by scribit. Et vnus vo articulus p cifra vel cifra & p digito a quo veniat dicitur articulus by reperitione qd dicitur

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 12

Forma de los digitos (con correcciones) 

Dificultades en los cálculos hasta el Siglo XVI

- El ábaco se utiliza en Europa hasta el Siglo XVIII (se introduce en China hacia el 1200, Corea en 1400 y en Japón 1600).
- Sólo personas extraordinariamente cultas sabían calcular
- Manuscrito anónimo de época de la reina Elizabeth, 1570:
 - La multiplicación es una vejación,
 - la división es un mal
 - la regla de tres es un rompecabezas,
 - y utilizarlos me vuelven loco

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

13

Primeras herramientas de ayuda al cálculo

- **John Napier**
(Edimburgo, 1550-1617)
 - Tablillas de Napier
 - inventó los logaritmos, para ayuda del cálculo (se puede multiplicar haciendo sumas)

Julio 1614



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

14

Primeras herramientas de ayuda al cálculo

- **Edmund Gunter (1620) (Prof. Astronomía del Gresham College de Londres)**
 - Cuadrante de Gunter, herramienta astronómica y de cálculo, precursora de la regla de cálculo
- **William Oughtred (1574?-1660) (matemático y clérigo inglés)**
 - Inventó la regla de cálculo

10/11/2000

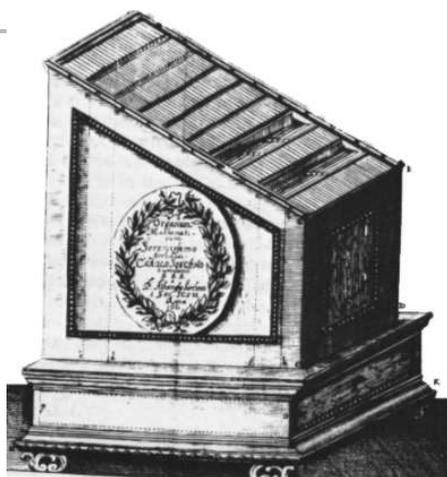
Matemáticas y computadores
A.Prieto

15

Órgano matemático de Gaspard Schott (1666),

AYUDAS (tablas, parámetros, etc.)
para:

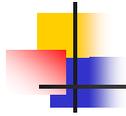
- Aritmética (tablillas de Napier)
- Geometría
- Fortificaciones
- Calendario
- Astronomía
- Obras públicas (construcción de canales)
- Música (composición)



10/11/2000

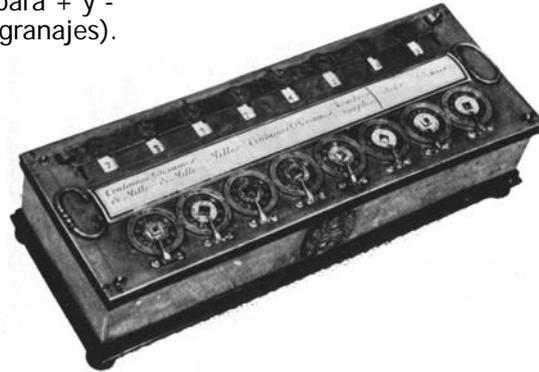
Matemáticas y computadores
A.Prieto

16



■ Blaise Pascal (1642)

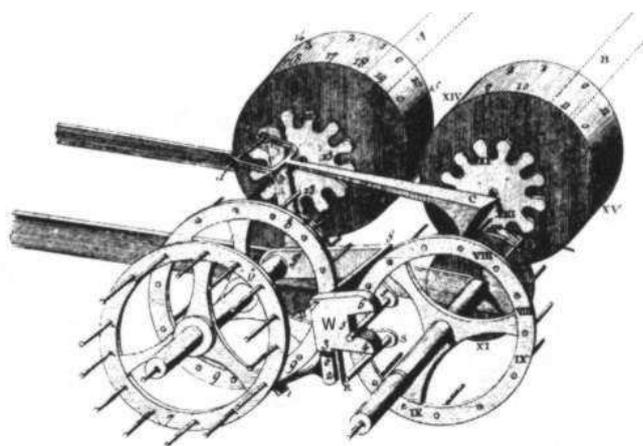
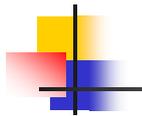
- calculadora mecánica para + y - (ruedas dentadas y engranajes).



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

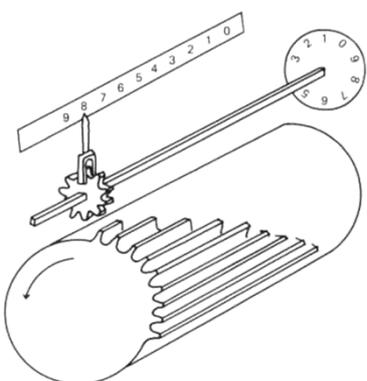
17



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

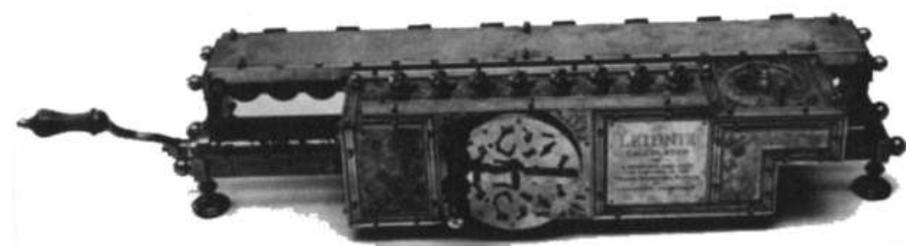
18



■ **Gottfried W. Leibnitz (Leipzig, 1646-1716)**

- calculadora mecánica para +, -, x, / (rueda de Leibnitz)
- investigó la aritmética binaria. Sentó las bases de la lógica simbólica.

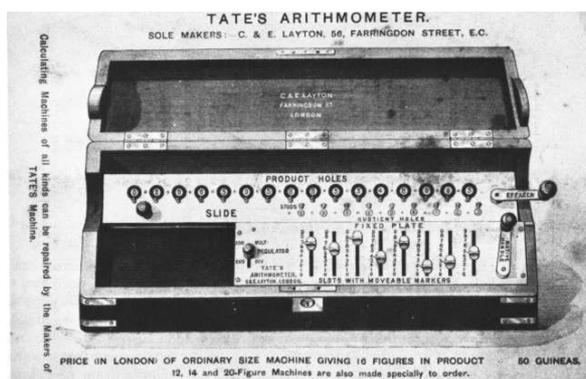
10/11/2000 Matemáticas y computadores A.Prieto 19



10/11/2000 Matemáticas y computadores A.Prieto 20

Primera calculadora mecánica de sobremesa

- **Charles Xavier Thomas de Colmar (Francia)**
 - comercializó la primera calculadora de sobremesa, perfeccionando las ideas de Pascal y Leibnitz: Arithmometer de Thomas (inicio de la década de 1820).



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

21

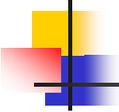
Piano matemático desarrollado por Thomas para la Exposición de París de 1850??



10/11/2000

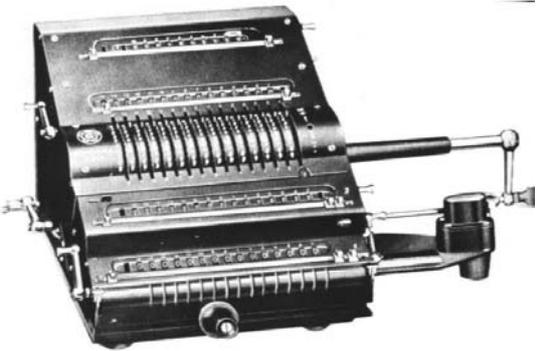
Matemáticas y computadores
A.Prieto

22



La "dupla" Brunsviga

Esta calculadora mecánica de sobremesa fue de las más utilizadas, desde 1885 hasta la década de 1950 (hasta 1912 se vendieron 20000)



10/11/2000

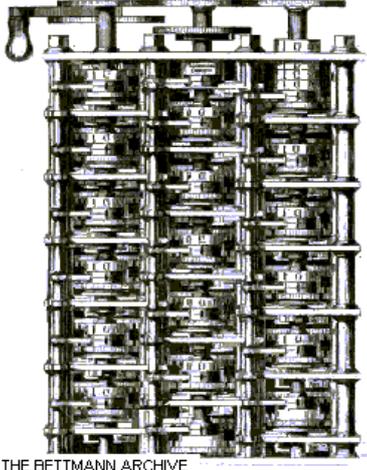
Matemáticas y computadores
A.Prieto

23



Máquina de diferencias

- **Charles Babbage (1791-1871)**
 - Máquina de diferencias (para hacer tablas matemáticas, evaluación de polinomios por el método de diferencias finitas)
 - .



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

24

Evaluación de un polinomio por diferencias finitas

- $F(x) = x^2 + 3x + 2$

- $x=0, F(0) = 0+0+0 = 2$

- $x=1, F(1) = 1+3+2 = 6$ $d(1,0) = 4$

- $x=2, F(2) = 4+6+2 = 12$ $d(2,1)=6$ $d'=2$

- $x=3, F(3) = 9+9+2 = 20$ $d(3,2)=8$ $d'=2$

- Evaluación por diferencias

- $x=0$ $F(0)=2$

- $x=1$ $d(1,0)=2+2=4$ $F(1)=F(0)+d(1,0)= 6$

- $x=2$ $d(2,1)=4+2=6$ $F(2)=F(1)+d(2,1)= 12$

- $x=3$ $d(3,2)=6+2=8$ $F(3)=F(2)+d(3,2)= 20$

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

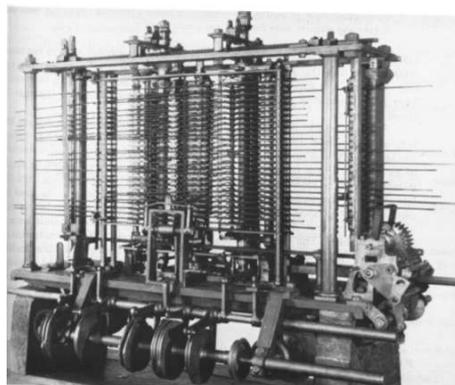
25

Charles Babbage

- Charles Babbage (1791-1871)

- Máquina analítica: almacén, taller, muela, tablillas perforadas (telares de Jacquard, 1801). Computación de uso general. Encadenamiento automático de secuencias por medios mecánicos.

V6xV2

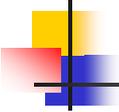


taller

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

26



- **George Boole (1815-1864)**
 - Asoció el álgebra binaria con el proceso de razonamiento (1854). Operaciones lógicas, 0:falso, 1:verdad,... (bases del diseño de circuitos electrónicos binarios y de la actual Lógica formal)
- **Herman Hollerit (1880)**
 - Tabuladora de tarjetas perforadas (1890 censo de USA en 3 años).
- **Leonardo Torres Quevedo (1852-1936)**
 - 1893: propone una máquina electromecánica basada en las ideas de Babbage.

Matemáticas y computadores
A.Prieto

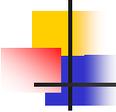
10/11/2000 27



- **K.Zusse (Berlín, 1939 a 1943)**
 - Construye computadores electromecánicos para cálculos aeronáuticos
- **Howard T. Aiken (1900-1973). Unv. Harvard**
 - 1944: Concluye Ila Mark I, computador electromecánico (relés) (x: 6s: /:12s). Instrucciones en cinta de papel. 15 años de uso
- **Claude E. Shannon (MIT)**
 - Aplico el Álgebra binaria de Boole al diseño de circuitos de conmutación.

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 28



- **1940: John Atanasoff, (Iowa State College) y Clifford Berry**
 - construyeron (sin concluir) la ABC de uso específico (resolver sistemas de ecuaciones lineales) utilizando *válvulas electrónicas*
- **1943 Alan Turing (1912-1954)**
 - desarrolló en Bletchley Park (Inglaterra) una serie de máquinas electrónicas programables ("Colossus) para descifrar los códigos alemanes.

10/11/2000 Matemáticas y computadores 29
A.Prieto



- **1945: John Mauchly y Presper Eckert**
 - terminan el ENIAC, primer computador de uso general (18.000 válvulas y 1.500 relés; 300 opera./seg, 30Tm). Univ. Pensylvania.
 - Tarjetas perforadas, 1 multiplicador, 1 divisor, Raíz cuadrada, 20 sumadores
 - Construida para hacer tablas balísticas



10/11/2000 Matemáticas y computadores 30
A.Prieto



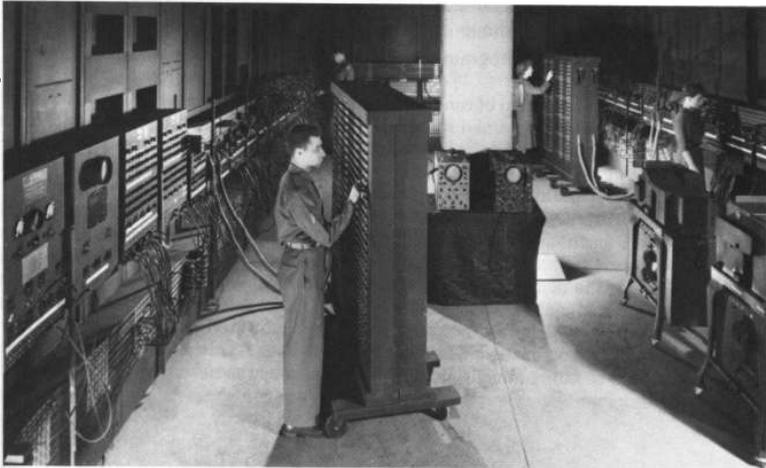
A black and white portrait of a man in a suit and glasses. The photo has handwritten text on it: "Proofs Only", "Tim. American. Photo Sec.", "20 11 51 1954", and "A. Prieto".

W. Mauchly

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

31



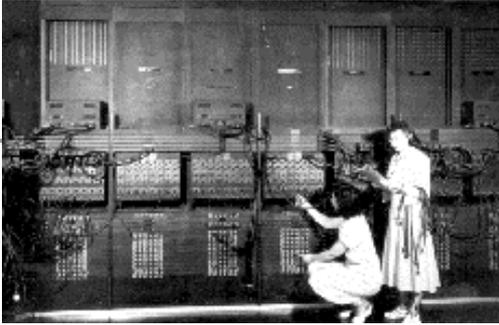
A black and white photograph of a person standing in a room filled with large, early computer equipment. The person is looking at a piece of equipment.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

32

ENIAC: Cableando un programa, en los paneles de control



ENIAC: Sustitución de uno de los 18000 tubos de vacío



Matemática

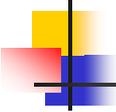
10/11/2000 A.Prieto 33



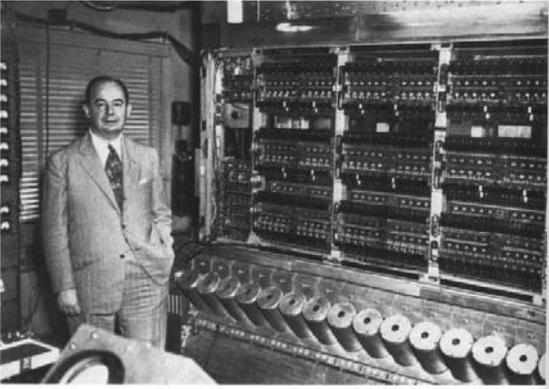
- **John von Neumann (1903-1957)**
 - Contribuyó a la sistematización de la lógica.
 - Publica un trabajo en 1945 con el concepto de programa almacenado (idea de Turing y Eckert y Mauchly???)
 - Intervino en el diseño del EDVAC: concepto de programa almacenado en memoria, junto con los datos. Noción de secuenciamiento de operaciones elementales. Utilización de aritmética binaria.
- **1945 Wilkes** (Universidad de Cambridge)
 - adelantándose al EDVAC, construye el EDSAC, primer computador con programa almacenado
 - Concepto de microprogramación

Matemáticas y computadores

10/11/2000 A.Prieto 34



- Foto de von Neumann con el IAS (construido con ayuda de Turing). Memoria con tubos CRT Williams. Con 40 tubos se dispone de 1024 palabras de 20 bits.



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

35



El primer computador comercial

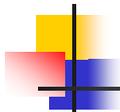
- **Eckert y Mouchly** crean su propia empresa, construyen el BINAC (se arruinaron: costo,\$240.000; encargo: 100000).
- **1951: UNIVAC I, primer computador comercializado (1000 operaciones/seg). (se vendieron 43 hasta 1957)**
 - Encargado por la oficina de censo de USA, entregado el 31 Marzo 1951
 - Desarrollada por Eckert y Mauchly en Remington- Rand (Sperry-Rand)
 - Se usaban líneas de retardo de mercurio como memoria: 1000 palabras de 11 dígitos decimales, acceso 222 μ s
 - Unidades de cinta magnética

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

36

Univac I



Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000

37

Univac I

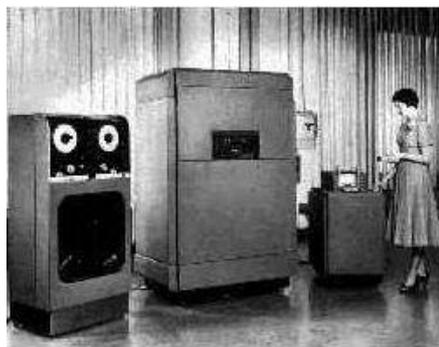
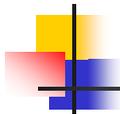


Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000

38

Univac I



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

39

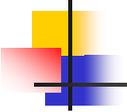


El UNIVAC I se utilizó para hacer previsiones de los resultados de las elecciones de 1952 . En la foto Mauckly con uno de los candidatos

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

40

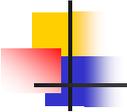


Evolución de los computadores

- **Cada vez se van consiguiendo computadores más:**
 - potentes,
 - pequeños,
 - baratos, y
 - fiables
- **Debido a la evolución de la**
 - Arquitectura de los computadores, y de la
 - Tecnología (Electrónica, etc.): válvulas -> transistores -> CI
- **Generaciones de computadores**

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 41



Las 4 generaciones de computadores

- **PRIMERA GENERACIÓN DE COMPUTADORES (1945-1957)**
 - utilización de válvulas electrónicas, memorias de líneas de retardo (mercurio,...)
 - hasta 1949: lenguajes máquina. Desde 1950 lenguajes simbólicos (ensambladores).
 - 1954: FORTRAN (FORMula TRANslator) (John Backus).
- **SEGUNDA GENERACIÓN DE COMPUTADORES (1959-1964)**
 - utilización de transistores, memorias de ferrita.
 - 1960: COBOL (Common Business-Oriented Language) (Grace Hopper)

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 42

Las 4 generaciones de computadores

- **TERCERA GENERACIÓN DE COMPUTADORES (1965-1970)**
 - utilización de circuitos integrados, memorias semiconductoras.
 - 1970: Pascal (Niklaus Wirth)
 - Grandes computadores atendiendo muchos terminales trabajando con colas de trabajos remotos o locales.
- **CUARTA GENERACIÓN DE COMPUTADORES (1971- ...)**
 - Circuitos integrados LSI y VLSI, memorias semiconductoras.
 - Microprocesadores y microcontroladores. (1981: IBM-PC)
 - Procesamiento paralelo
 - Lenguajes declarativos, y orientados a objetos
 - Sistemas informáticos distribuidos (copartición de recursos).
 - Dominio de ciertos SO: MS y UNIX

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

43

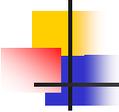
Las 4 generaciones de computadores

Años	Generación	Tecnología	Velocidad operativa	Innovaciones hardware	Innovaciones software	Computadores representativos
1946-58	Primera	Tubos de vacío; memorias de retardo de Hg.; memorias CRT	ms	Aritmética de punto fijo	L. máquina; L. ensambladores	UNIVAC I; NCR 102 IBM 702 IBM 650
1959-63	Segunda	Transistores; ferritas; discos magnéticos	μs	Aritmética expo. Registros índices Proc. de E/S	LANs; Bibliotecas de subrutinas; Monitores batch	IBM 7094 UNIVAC 1004 IBM 1620 CDC 1604
1964-70	Tercera	C.I. (SSI y MSI)	ns	μprogramación segmentación memorias caché	Multiprogramación Multiprocesamiento Memoria virtual	Amdahl, PDP-8 IBM 360, 370 UNIVAC 1108
1971-	Cuarta	C.I. (VLSI)	ns	μprocesadores μcontroladores Arquitecturas RISC, paralelas, ..	L. declarativos L. orientados a objetos; Menús; iconos,...	PCs (8088,...) WorkStation

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

44



Los supercomputadores

- **Procesamiento paralelo**
- **Cyber 205, Cray X-MP (mas de 4.000 millones de ptas.)**
- **Aplicaciones: Simulación de procesos complejos**
 - **Fisión nuclear** (conocer en intervalos de ns que ocurre con exactitud cuando el material fisionable se acerca a su masa crítica: se simulan las acciones y reacciones de millones de átomos interactuando)
 - **Contaminación ambiental.** Modelo de contaminación de aire en Los Ángeles con más de 500.000 variables (altura, temperatura, y sustancias químicas).
 - **Predicción meteorológica**

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 45



Los supercomputadores

- **Predicción meteorológica.** Oficina M. de Bracknell y Centro Europeo de Predicciones Metereológicas a Medio Plazo de Reading. Se utilizan un modelo global y un modelo regional (Europa y Atlántico N.)
 - Actualización cada 12 h. de una base de datos, con información procedente de estaciones metereológicas, faros, globos, barcos, aviones y satélites del Sistema Global de telecomunicaciones de la OMM.
 - Red/retícula de 15 capas de altura, y separación media de unos 75 Km. En cada punto se estima la velocidad de viento, temperatura, presión y humedad.
 - A partir del modelo geométrico se utiliza un modelo matemático (ecuaciones diferenciales) para estimar en un instante posterior los movimientos de aire, las transferencias de energía,... entre los distintos puntos de la red. Para predecir lo que ocurre a los 7,5' se tarda 1,25".
 - En 1990: Cyber 205, 2 IBM 3081, y procesadores de comunicaciones

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 46

Ejemplo de supercomputador: El Cray-1

Diseño de Seymour Cray de Cray Research, de Eagan, Minnesota, EEUU (1976).

- Fue el primer computador capaz de ejecutar más de 100 millones de operaciones de coma flotante por segundo.
- Ctos. ECL \Rightarrow calor y consumo
- Para eliminar la gran cantidad de calor generado se montan los circuitos sobre placas verticales enfriadas mediante un sistema basado en gas freón.
- Para reducir el retardo de transmisión por los cables los distintos armarios se ubican en forma circular (20 cm/ns)
- El Cray-1 se utiliza como unidad de medida informal para las supercomputadoras más nuevas, algunas de las cuales se proyectan ahora para ser equivalentes a 1.000 crays.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

47



Dale E. Boyer/Photo Researchers, Inc.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

48



Los supercomputadores

- **Clusters de PCs**
 - Dpto. ATC: 1997, Oxígeno, 8 Pentium II, 330 MHz
 - **Sistemas de procesadores masivamente paralelos.** Ejemplo el computador del Laboratorio Nacional Sandia del Departamento de Energía de USA: incluye más de 7200 procesadores Pentium Pro, alcanzando una velocidad de 1,06 teraflops (billones de operaciones con datos reales por segundo)

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 49



Los supercomputadores

- **Computador mas rápido del mundo (Nov. 2000):**
 - ASCI White, 12,3 Teraflops
 - 8192 procesadores, Power 3, 375 MHz
 - Lawrence Livermore National Lab. (US Energy Dep.)
 - Seguridad y fiabilidad nuclear
 - 6TB MP, 160 TB de disco
 - Superficie de 2 campos de baloncesto.
 - Costo: 110 millones de \$ (20.000 millones de ptas.)

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 50



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

51

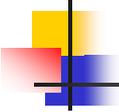


Este circuito integrado, un microprocesador F-100, tiene sólo 0,6 cm², y es lo bastante pequeño para pasar por el ojo de una aguja.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

52



3. Problemas aritméticos de los computadores

- Defectos debidos a la precisión limitada
- Errores de diseño: casos del supercomputador Cray y del microprocesador Pentium

10/11/2000 Matemáticas y computadores A.Prieto 53



3. Problemas aritméticos de los computadores

- **La aritmética del computador se implementa en:**
 - La ALU
 - El coprocesador matemático
 - Los traductores (interpretes o compiladores) de lenguajes.

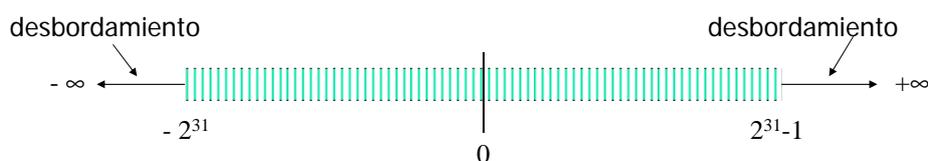
10/11/2000 Matemáticas y computadores A.Prieto 54

2.4.1 DATOS DE TIPO ENTERO (3)

Si $n=32$ bits, en complemento a 2:

$$N(\text{m\u00e1ximo}) = 2^{31}-1 = 2\,147\,483\,647$$

$$N(\text{m\u00ednimo}) = -(2^{31}) = -2\,147\,483\,648$$



10/11/2000

Matem\u00e1ticas y computadores
A.Prieto

55

2.4.2 DATOS DE TIPO REAL(3). Normalizaci\u00f3n IEEE 754

- **Representaci\u00f3n interna de datos de tipo real: normalizaci\u00f3n IEEE 754:**
 - (1) **La base del exponente es $B=2$, es decir est\u00e1 predeterminada**

$$N = \pm M \cdot 2^E$$

de esta forma s\u00f3lo es necesario almacenar, de alguna forma, el signo, M y E

10/11/2000

Matem\u00e1ticas y computadores
A.Prieto

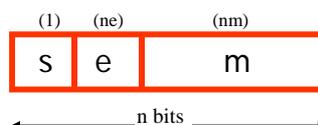
56

2.4.2 DATOS DE TIPO REAL(4)

(2) Se memoriza:

- un campo del signo (s) que ocupa 1 bit,
- un campo del exponente (o característica, e), que ocupa ne bitsy
- un campo de la mantisa (m), que ocupa nm bits.

■ Se verifica:



$$n = 1 + ne + nm$$

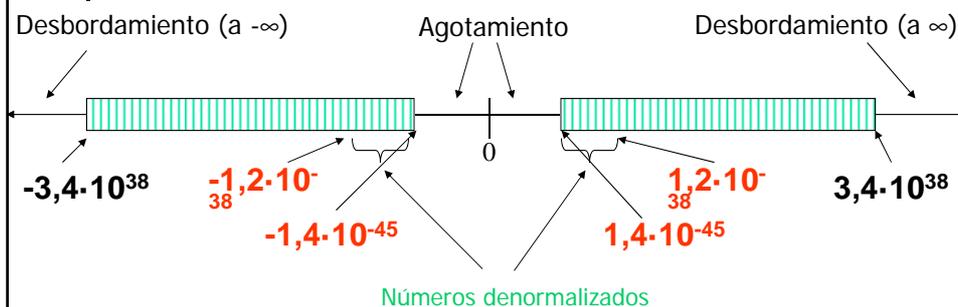
- El orden de almacenamiento es: campo de signo (s), campo de exponente (e) y campo de mantisa (m).

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

57

2.4.2 DATOS DE TIPO REAL(11)



10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

58

3.1 Defectos debidos a la precisión limitada

■ **Idea clave:**

- Los números enteros se representan con exactitud entre el mayor y menor representables; sin embargo los números reales representados usualmente son aproximaciones a números que en realidad no se pueden representar:
 - La aplicación no es univoca, ya que cada dato de tipo real es la imagen de un conjunto infinito de números reales (representa un intervalo de la recta real).
 - Así, en coma flotante, precisión sencilla (23 bits de mantisa) entre dos números enteros consecutivos sólo se pueden representar $2^{24} \approx 16 \cdot 10^6$ números reales.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

59

3.1 Defectos debidos a la precisión limitada

■ **REDUCCIÓN DEL PROBLEMA: redondeo**

- El sistema usual de redondeo no siempre es justo:
 - $7,4 \approx 7$ $6,8 \approx 7$ $7,5 \approx 8$



El que cobra gana y el que paga pierde

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

60

3.1 Defectos debidos a la precisión limitada

- La forma usual de redondeo no es adecuada (cuando se produce igual error truncando o sumando, se redondea por exceso): en operaciones sucesivas se introduce un sesgo.
- Importancia económica (caso de fraude informático):
 - Si cobro por parciales, gano al abonar el total
 - Conversión de ptas. a euros: $e_{\max}=0,005 \text{ E} = 0,83 \text{ ptas.}$
 - Conversión de euros a ptas.: $e_{\max}=0,5 \text{ ptas.} = 0,003 \text{ E}$
 - El cambio de ptas. a euros no es reversible:
 - 101 ptas \rightarrow 0,61 E \rightarrow 102 ptas.
 - 1.831 ptas. \rightarrow 11 E \rightarrow 1830 ptas.
 - Comité de Tecnología de Moneda Única de la CECA (1996)
 - Estiman que la conversión de un millón de ctas. ctes. de ptas. a euros supone una pérdida del orden de 100.000 ptas.
 - Debe darse prioridad a la conversión de los totales frente a las de los sumandos

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

61

3.1 Defectos debidos a la precisión limitada: IEEE 754

- **Estándar IEEE 754/854: trata de normalizar las representaciones de coma flotante, y hacerlo de la forma más inteligente posible**
 - **Redondeo al par:** en el caso de que el error al redondear por defecto o por exceso sea igual, se hace de forma que el ultimo bit sea 0 \Rightarrow equivale a tomar la decisión aleatoriamente

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

62

2.4.2 DATOS DE TIPO REAL(8)

- EJEMPLO: Supóngase que $nm=5$.

Resultado de la ALU	Acción	Mantisa redondeada
1.01100 11	sumar 1	1.01101
1.01100 01	truncar	1.01100
1.01100 00	truncar	1.01100
1.01101 10	sumar 1	1.01110
1.01100 10	truncar	1.01100

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

63

OPERACIONES BASICAS CON DATOS REALES (IEEE754): producto

- 1) Sumar los exponentes:

$$E_r = E_1 + E_2 \quad e_r = e_1 + e_2 - S$$

- 2) Multiplicar las mantisas:

$$M_r = M_1 \cdot M_2$$

- 3) signo $sr = s_1 \oplus s_2$

- 4) Normalizar, si es necesario, el resultado. Es decir,

- mientras $M_r > 2$, hacer: $M_r \leftarrow M_r \cdot 2^{-1}$; redondeo de M_r ; y $e_r \leftarrow e_r + 1$;
- sino mientras sea $M_r < 1$, hacer: $M_r \leftarrow M_r \cdot 2$; y $e_r \leftarrow e_r - 1$

En cualquiera de las fases:

si $M_1' = 0 \Rightarrow N_1 = 0$; o si $M_2' = 0 \Rightarrow N_2 = 0$, y acabar
o si hay desbordamiento hacer $W = 1$ y acabar

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

64

3.2 Errores de diseño de la ALU (y del coprocesador matemático)

- **ALU:**

- *"ALU (Unidad Artrítica y Lógica): Generador de números aleatorios que viene de serie en todos los computadores"*

(Stan Kelly-Bootle, The Devil's DP Dictionary, 1981)

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

65

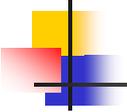
3.2 Errores de diseño (en la ALU, coprocesador aritmético o compilador)

- **La suma y la multiplicación de datos de tipo real cumplen la propiedad conmutativa, pero no siempre la asociativa ni la distributiva:**
 - Suponer que $B=10$, mantisa de 4 dígitos y exponente de 1. $X=5000$, $y=-4999$, $z=1500$ (pag.35, l. a la l.).
- **No se permiten la representación de números muy grandes ni muy pequeños**

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

66



Error en el IBM S/360

- **IF (1,0*x = x)**
 - 1,0 se almacena como real:
 - $1,0 = 0.1761103783... * 16^1 = 0.2D1591DB... * 16^1$
 - Al multiplicar por x, se obtiene un numero diferente de x
 - se contradijo un teorema de la precisión sencilla: "si $\frac{1}{2} \leq x/y \leq 2$, entonces no se produce ningún error al calcular x-y"

Un número entero como dato de tipo entero queda representado exactamente; sin embargo, como real esto no suele ocurrir

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 67



Error en el CDC (Control Data Corp)

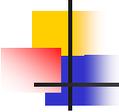
- En los supercomputadores buscaban **a toda costa rapidez y potencia**
 - **IF (x == 0.0) y=17.0 else y=z/x**
 - Se pretende que la división se haga siempre que su denominador no sea cero

La comparación de x con 0.0 se hace en un sumador, y se hace la comparación sólo con los 13 primeros bits de x. En cambio el multiplicador y divisor consideraban sólo los 12 primeros bits

- Solución:
 - **IF (1.0*x == 0.0) y=17.0 else y=z/x**

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 68



Error en el Cray

- En general el error anterior se arregla así para cualquier computador.
- En el Cray no, puede dar error de desbordamiento incorrectamente, debido a que en el Cray con las multiplicaciones el desbordamiento se produce para valores la mitad del límite usual:

Se comprueba si hay desbordamiento en el exponente antes de restarle el sesgo.

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 69



Error en el Cray y en el Intel i860

- Aunque z sea del orden de magnitud de x , $y=z/x$ puede dar error de desbordamiento

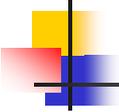
Para dividir, primero hace $1/x$, y el resultado luego lo multiplica por z .

- Si x es muy grande, aunque el cociente vaya a ser pequeño se produce desbordamiento

$$y = 1,5 \cdot 10^{38} / 3 \cdot 10^{38}$$

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 70



El error mayor de los Cray

- Ausencia del bit de guarda en el sumador/restador.
- Eliminación de casi 1/3 de los bits menos significativos del resultado de la multiplicación

- Problemas muy serios cuando se acumulan productos parciales (en la raíz cuadrada, etc.)

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 71

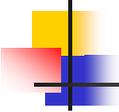


Error en el Pentium

- Jul. 1994. Intel descubre el error. Se calla ya que prevé que su solución no llegará hasta Enero 95 (**¡del orden de 4 millones de Pentium con error!**)
- Sep. 1994. Thomas Nicely, catedrático de matemáticas del Lynchburg College de Virginia descubre el error. Lo comunica a Intel no obtiene reacción oficial. Difunde el hecho por internet
- 22 Nov. 1994. Intel informa de que es un error menor (sólo afectará a unas cuantas docenas de personas)
- 5 Dic. 1994: Intel estima que el error se producirá una vez cada 27000 años (suponen 1000 div/día, y que los n^o reales se producen de forma aleatoria: 1 cada 9000 millones)

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000 72



Error en el Pentium

- 12 Dic. 1994. IBM estima un error cada 24 días (suponen 5000 divisiones por segundo, 15 minutos al día, la probabilidad de uso de un valor en el rango donde se produce el error de 1 cada 100 millones). Detiene la producción de PC con el Pentium.
- 21 Dic. 1994. Intel reconoce el error. Propone cambiar sin coste alguno las versiones defectuosas. **Coste: 60.000 millones de ptas.**
- Abr. 1997. Error en el Pentium Pro y Pentium II (paso de reales a enteros, cuando no caben se activa el bit de falta de precisión en lugar del de operación no valida). Se distribuye un parche software.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

73



Error en el Pentium: ¿en qué consiste?

- A través de internet se difunden las situaciones donde se produce el error.
- Por ejemplo, 15 Nov. 94 Cleve Moler (MathWorks):

$$x=4195835$$

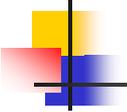
$$y=3145727$$

$$z=x-(x/y)*y$$
 Da como resultado $z = 256$ (en otros procesadores 0 ó $9.3 \cdot 10^{-10}$)
- 28 Nov. 94 Tim Coe de Vitesse Semiconductor difunde un programa en C que emula el comportamiento del divisor hardware del Pentium, reproduciendo las situaciones de error.

10/11/2000

Matemáticas y computadores
A.Prieto

74



¿En qué consiste el error?

573275	5
07	100 000
-30	20 000
+3	-6 000
-27	700
+30	-50
30	5
2	114655
32	
-35	
-30	
7	
-23	
+25	
25	
-25	
00	

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000
75



Error en el Pentium: ¿en qué consiste?

- Utilizaron un algoritmo de división sin restauración, y, al igual que en el 486, la división la hace de forma que se van generando los bits del cociente de 2 en 2. Para ello en cada etapa se estima (a grosso modo) las nuevas cifras del cociente: -10, -01, 00, 01 y 10. Esta estimación se multiplica por el divisor y se subtrae del resto, para obtener el nuevo resto. Si la estimación es demasiado grande, el resto parcial se ajusta en el siguiente paso.
- Los valores -2, -1, 0, 1 y 2 los iban a grabar en una tabla (PLA), como en el 80486; pero estaban mal de espacio, y un **listo** pensó que siempre se corregiría el valor del siguiente resto parcial por lo que eliminaron de la tabla el -2 y +2
- **RESULTADO:** los primeros 11 bits son siempre correctos, pero se pueden producir errores de la 12 a la 52 (de la 4ª a la 15ª cifra decimal)

Matemáticas y computadores
A.Prieto

10/11/2000
76



Conclusiones

“Lo rápido desplaza a lo lento, aunque lo rápido sea erróneo”
W.Kahan, 1992

“La velocidad no te lleva a ninguna parte, si estás en el camino equivocado”
Proverbio americano

10/11/2000Matemáticas y computadores
A.Prieto77



Bibliografía

- M.R. Williams, “A history of computing technology”, Prentice Hall 1985
- D.A. Paterson, J.L. Hennessy, “Estructura y diseño de computadores”, Edt. Reverté, 2000
- A.Prieto, A.Lloris, J.C.Torres, “Introducción a la Informática”, McGraw-Hill, 1995. (*Capítulo 14*).
- J.Meyers, “A short history of the computer”, <http://www.softlord.com/compt>
- B. Randell (Edt.), “The origins of digital computers”, Springer Verlag, 1970 (recopila artículos originales de los pioneros de los computadores)
- Top500

10/11/2000Matemáticas y computadores
A.Prieto78